

В.Б. САМОРОДОВ, д-р. техн. наук, **А.О. ОСТРОВЕРХ**, аспирант,
НТУ «ХПИ» (г. Харьков)

**ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ БАЗИСНЫХ
МАТРИЦ ПЛАНЕТАРНЫХ РЯДОВ ПРИ АНАЛИЗЕ
КИНЕМАТИКИ ТРАНСМИССИЙ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ**

Запропонована універсальна матрична методика розрахунку кінематики планетарних механізмів. Показано, що кінематичні матричні системи планетарних механізмів, не дивлячись на відмінність в записі з різними значеннями характерних параметрів сателітів, інваріантні по відношенню до вектора невідомих.

The universal matrix design procedure of kinematics of planetary mechanisms is offered. It is shown, that kinematics matrix systems of planetary mechanisms, despite of distinction in record with different values of characteristic parameters of satellites, invariance in relation to a vector of unknown persons.

Введение. Существует множество различных конструктивных схем планетарных рядов или трёхзвенных дифференциальных механизмов (ТПМ) используемых в трансмиссиях транспортных средств.

Анализ последних достижений. Возможные схемы простых планетарных рядов с однозвенными сателлитами и их обобщенная структурная схема показана на (рис. 1).

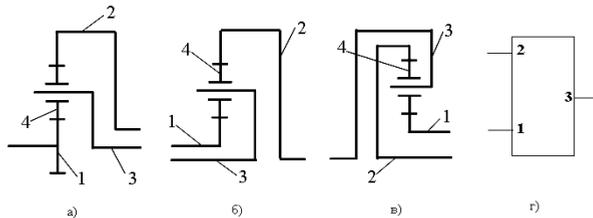


Рисунок 1 - Конструктивные схемы (а, б, в) и структурная схема (г) ТПМ с однозвенными сателлитами, внешним и внутренним зацеплением

Планетарные ряды с двухзвенными сателлитами могут иметь только внешние (рис. 2а), только внутренние (рис. 2б) или внешние и внутренние (рис. 2в) зацепления. Такие планетарные ряды, как и ТПМ любой конфигурации, описываются структурной схемой, показанной на (рис. 1г). Классический кинематический анализ планетарных механизмов изложен в трудах [1-3]. Попытка введения характерных параметров, учитывающих вид зубчатых зацеплений и универсализация расчета кинематики планетарных механизмов, включая относительные скорости сателлитов, была предпринята в работах [5,6].

По мнению авторов на основании указанных работ целесообразно построить универсальную и эффективную методику автоматизированного ана-

лиза кинематики сколь угодно сложных планетарных механизмов трансмиссий современных транспортных средств.

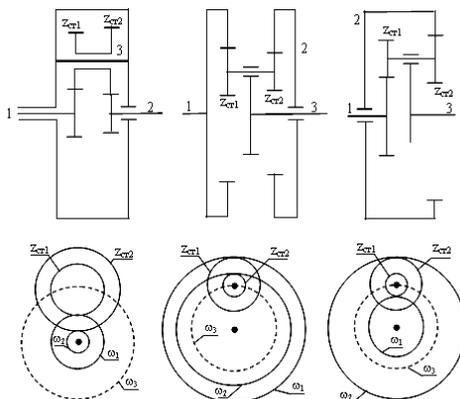


Рисунок 2 - Конструктивные схемы ТПМ с двухвенцовыми сателлитами

Цель работы. 1) Построение универсальной матричной методики расчета кинематики планетарных механизмов на основе введения характерных параметров, учитывающих вид зубчатых зацеплений. 2) Представление инвариантности кинематических матричных систем планетарных механизмов, не смотря на отличие в записи с разными значениями указанных характерных параметров, по отношению к вектору неизвестных.

Универсализация математической модели кинематики планетарных механизмов. На основании уравнения Виллиса [1-3] для трёхзвенного дифференциального механизма (ТПМ), имеющего в общем случае двухвенцовые сателлиты имеем:

$$\frac{W_1 - W_3}{W_2 - W_3} = k = \pm \frac{z_{ст1} \cdot z_2}{z_{ст2} \cdot z_1}, \quad (1) \quad \frac{W_{ст} - W_3}{W_1 - W_3} = \pm \frac{z_1}{z_{ст1}} = S_1, \quad (2)$$

$$\frac{W_{ст} - W_3}{W_2 - W_3} = \pm \frac{z_2}{z_{ст2}} = S_2, \quad (3) \quad k = \pm \frac{z_{ст1} \cdot z_2}{z_{ст2} \cdot z_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (4)$$

где индексы "1", "2", "3", "ст" относятся соответственно к абсолютным угловым скоростям W солнечной (1), коронной (2) шестерен, водила (3) и сателлитов (ст); z_1, z_2 и $z_{ст1}, z_{ст2}$ - числа зубьев на соответствующих шестернях; k - внутреннее передаточное отношение планетарного ряда ($k < 0$, если ТПМ имеет внешнее и внутреннее зацепления и $k > 0$ - в случае только внутренних или только внешних зацеплений [1-3]); $z_{ст1}$ и $z_{ст2}$ - числа зубьев в общем случае двухвенцовых сателлитов, входящих в контакт с солнечной ($z_{ст1}$) и коронной ($z_{ст2}$) шестернями; $z_{ст}$ - число зубьев в случае одновенцовых сателлитов, S_1, S_2 - характерные параметры сателлитов, которые имеют физический смысл

передаточных отношений зубчатых зацеплений. Знак при k автоматически определяется знаками характерных параметров сателлитов S_1 и S_2 следующим образом: $S_{1,2} < 0$, если венец сателлита имеет внутреннее зацепление с солнечной или коронной шестернями и $S_{1,2} > 0$ - в случае только внешних зацеплений.

В случае одновенцовых сателлитов в планетарном ряду формально $z_{ct1} = z_{ct2} = z_{ct}$, тогда уравнения (1) - (4) имеют вид:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = k = \pm \frac{z_2}{z_1}, \quad (5) \quad \frac{w_{ct} - w_3}{w_1 - w_3} = \pm \frac{z_1}{z_{ct}} = S_1, \quad (6)$$

$$\frac{w_{ct} - w_3}{w_2 - w_3} = \pm \frac{z_2}{z_{ct}} = S_2, \quad (7) \quad k = \pm \frac{z_2}{z_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (8)$$

Легко убедиться, что любое из уравнений (1)-(4) или (5)-(8) есть тождественное следствие трех других уравнений, что в итоге приводит к инвариантности кинематических базисных матриц ТПМ.

Основное кинематическое уравнение планетарного ряда и относительная угловая скорость сателлита ω_s в его относительном движении вокруг водила на основании формул (4)-(6) с учетом введенной выше аксиоматики для знаков характерных параметров S_1 и S_2 по виду зацепления (внешнего - «+» или внутреннего - «-») записываются в виде:

$$\omega_1 - k\omega_2 + (k-1)\omega_3 = 0; \quad (9)$$

$$w_s = w_{ct} - w_3 = -S_1 w_1 + S_1 w_3; \quad (10)$$

$$w_s = w_{ct} - w_3 = -S_2 w_2 + S_2 w_3. \quad (11)$$

Особенностью уравнений (10) (11) является то, что знак их правой части изменен на противоположный по сравнению с рекомендациями трудов [1,3]. Как будет проиллюстрировано ниже введение в рассмотрение характерных параметров зубчатых зацеплений S_1 и S_2 с учетом их знаков от вида зацепления позволяет эффективно автоматизировать анализ кинематики сколь угодно сложных планетарных механизмов.

Кинематические базисные матричные уравнения ТПМ имеют вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & k-1 & 0 \\ S_1 & 0 & -S_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_s \end{bmatrix}^T = 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & k-1 & 0 \\ 0 & S_2 & -S_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_s \end{bmatrix}^T = 0 \quad (13)$$

Матрицы размером 2×4 в уравнениях (12) и (13) называются кинематическими базисными матрицами планетарного ряда или ТПМ [4,5].

Для наиболее распространенного и часто встречающегося в планетарных передачах, планетарного ряда с одновенцовым сателлитом соотношения

для числа зубьев солнца (z_1), короны (z_2) и сателлита (z_{ct}) через радиусы этих зубчатых колес r_1 (солнца), r_2 (короны) и модуль m зубчатого зацепления имеют вид:

$$z_1 = \frac{2r_1}{m}; \quad z_2 = \frac{2r_2}{m}; \quad r_2 - r_1 = z_{ct} \cdot m, \quad (14)$$

откуда с учетом (5) - (8)

$$z_{ct} = \frac{r_1}{m} \cdot (|k| - 1); \quad (15) \quad S_1 = \pm \frac{z_1}{z_{ct}} = \pm \frac{2}{|k| - 1}; \quad (16)$$

$$z_{ct} = \frac{r_2}{m} \cdot \frac{|k| - 1}{|k|}; \quad (17) \quad S_2 = \pm \frac{z_2}{z_{ct}} = \pm \frac{2|k|}{|k| - 1}. \quad (18)$$

Кинематические базисные матрицы ТПМ из уравнений (12) и (13) с учетом соотношений (16), (18) удобно представить в виде:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -k & k-1 & 0 \\ \pm \frac{2}{|k|-1} & 0 & \mathbf{m} \frac{2}{|k|-1} & 1 \end{array} \right], \quad (19) \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -k & k-1 & 0 \\ 0 & \pm \frac{2|k|}{|k|-1} & \mathbf{m} \frac{2|k|}{|k|-1} & 1 \end{array} \right]. \quad (20)$$

Для трёхзвенных дифференциальных механизмов, имеющих в общем случае двухвенцовые сателлиты на основании соотношений (1)-(4) имеем

$$S_1 = \pm \frac{z_2}{k \cdot z_{ct2}}, \quad (21) \quad S_2 = \pm \frac{z_1 \cdot k}{z_{ct1}}. \quad (22)$$

Кинематические базисные матрицы для ТПМ с двухвенцовыми сателлитами из уравнений (12) и (13) с учетом соотношений (21), (22) представляются в виде:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -k & k-1 & 0 \\ \pm \frac{z_2}{k \cdot z_{ct2}} & 0 & \mathbf{m} \frac{z_2}{k \cdot z_{ct2}} & -1 \end{array} \right], \quad (23) \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -k & k-1 & 0 \\ 0 & \pm \frac{z_1 \cdot k}{z_{ct1}} & \mathbf{m} \frac{z_1 \cdot k}{z_{ct1}} & 1 \end{array} \right]. \quad (24)$$

Проиллюстрируем важное свойство инвариантности кинематических базисных матриц (12), (13); (19), (20) и (23), (24) планетарных рядов при анализе кинематики трансмиссий транспортных средств. При этом методология использования кинематических базисных матриц ТПМ распространяется, как было сказано выше на сколь угодно сложные планетарные механизмы или их части с учетом указанной инвариантности. Покажем это на примере матричного моделирования кинематики механической передачи планетарного типа с усложненной архитектурой планетарных рядов. На рис. 3 один венец двухвенцового сателлита с числом зубьев 18 является сателлитом первого планетарного ряда, а второй венец этого са-

теллита с числом зубьев 15 – сателлитом второго планетарного ряда. Формально оба указанных сателлита и оба планетарных ряда имеют общее водило. Первые индексы «1» и «2» при угловых скоростях звеньев относятся к номеру планетарного ряда (считая слева направо), а вторые индексы определяют собственно звено планетарного ряда.

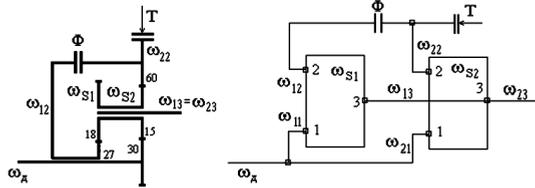


Рисунок 3 - Схема планетарного механизма
а) кинематическая схема; б) структурная схема

Для рассматриваемого планетарного механизма с учетом формул (1)–(4) с конкретным числом зубьев шестерен и видом зубчатых зацеплений (все внешние, кроме одного внутреннего - короны второго планетарного ряда и венца сателлита с числом зубьев 15). $S_{11} = +30/15 = 2$; $S_{12} = +27/18 = 1,5$; $k_1 = S_{12}/S_{11} = (27/30) \cdot (15/18) = +0,75$; $S_{21} = +30/15 = 2$; $S_{22} = -60/15 = -4$; $k_2 = S_{22}/S_{21} = -4/2 = -2$ (здесь первый индекс относится к номеру планетарного ряда). Очевидно, что $\omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{21}$, $\omega_{13} = \omega_{23}$ (общее водило).

Рассмотрим описание кинематики данного механизма вначале при выключенном фрикционе ($\Phi=0$) и включенном тормозе ($T=1$).

Кинематический подготовительный шаблон (25) с использованием кинематической базисной матрицы, например в форме (13), имеет вид:

ω_d	ω_{22}	ω_{12}	ω_{21}	ω_{23}	ω_{s1}	ω_{s2}
0	T	0	0	0	0	0
0	-Φ	Φ	0	0	0	0
-1	0	0	1	0	0	0
0	0	-k ₁	1	k ₁ -1	0	0
0	0	S ₁₂	0	-S ₁₂	1	0
0	-k ₂	0	1	k ₂ -1	0	0
0	S ₂₂	0	0	-S ₂₂	0	1

(25)

При задании ω_d , например $\omega_d = 100$ рад/с, для включенного тормоза T ($T=1$) и выключенного фрикциона Φ ($\Phi=0$ и вторая строка в шаблоне исключается как нулевая) имеем замкнутую кинематическую матричную систему размером 6х6:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 1 & k_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{12} & 0 & -S_{12} & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & k_2 - 1 & 0 & 0 \\ S_{22} & 0 & 0 & -S_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{22} \\ w_{12} \\ w_{21} \\ w_{23} \\ w_{s1} \\ w_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Решение этой системы в среде MathCAD иллюстрируются ниже:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 1 & k_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{12} & 0 & -S_{12} & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & k_2 - 1 & 0 & 0 \\ S_{22} & 0 & 0 & -S_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ w_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 122.222 \\ 100 \\ 33.333 \\ -133.333 \\ -133.333 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Очевидно $w_{22}=0$ из-за блокировки звена тормозом Т; $w_{12}=+122,222$ рад/с – угловая скорость свободного звена при разомкнутом фрикционе ($\Phi=0$), совпадающая по направлению вращения с угловой скоростью центрального звена $\omega_d=+100$ рад/с; $w_{21}=\omega_d=+100$ рад/с; $w_{23}=+33.333$ рад/с – угловая скорость общего водила, совпадающая с направлением ω_d ; $\omega_{s1}=\omega_{s2}=-133,333$ рад/с – относительные скорости сателлитов относительно их общего водила, направленные в сторону противоположную ω_d .

Использование кинематической базисной матрицы, в форме (12) приводит к матричной системе, решение которой в среде MathCAD в точности совпадает с решением (27):

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 1 & k_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & -S_{11} & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & k_2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & -S_{21} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ w_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(Q, G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 122.222 \\ 100 \\ 33.333 \\ -133.333 \\ -133.333 \end{pmatrix}$$

Как видно, матричные системы (12) и (13), несмотря на различие в записи с разными значениями характерных параметров сателлитов S_{12} и S_{22} , абсолютно инвариантны по отношению к вектору неизвестных. То же решение дают кинематические базисные матрицы в виде (19) и (20) для однозвенцовых сателлитов и матрицы в виде (23) и (24) для двухзвенцовых сателлитов. Для рассматриваемого планетарного механизма характерные параметры зубчатых зацеплений S_1 и S_2 могут быть вычислены через внутренние передаточные отношения планетарных рядов k_1 и k_2 . Для первого планетарного ряда с двухзвенцовым сателлитом и только внешними зацеплениями по формулам (21), (22) имеем соответственно

$S_{11}=+27/(0,75 \cdot 18)=2$; $S_{12}=(30 \cdot 0,75)/15=1,5$ (очевидно $k_1 = S_{12} / S_{11} = +0,75$). Для второго планетарного ряда с одновенцовым спутником внешним и внутренними зацеплениями по формулам (16),(18) имеем соответственно $S_{21} = +2/([-2]-1)=2$; $S_{22} = -2 \cdot (-2)/([-2]-1)=-4$; (очевидно $k_2 = S_{22}/S_{21} = -4/2 = -2$). Ниже проиллюстрирована инвариантность кинематических базисных матриц (19) и (20) для одновенцовых спутников и матриц (23) и (24) для двухвенцовых спутников в общей кинематической системе данного планетарного механизма фрагментом программы в среде MathCAD:

$$S_{11} = \frac{z_2}{k_1 \cdot z_{st2}} \quad S_{11} = 2$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 1 & k_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & -S_{11} & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & k_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & -S_{21} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ w_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Isolve}(R, G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 122,222 \\ 100 \\ 33,333 \\ -133,333 \\ -133,333 \end{pmatrix}$$

$$S_{12} = \frac{z_1 \cdot k_1}{z_{st1}} \quad S_{12} = 1,5$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 1 & k_1 & -1 & 0 \\ 0 & S_{12} & 0 & -S_{12} & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & k_2 & -1 & 0 \\ S_{22} & 0 & 0 & -S_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ w_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Isolve}(F, G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 122,222 \\ 100 \\ 33,333 \\ -133,333 \\ -133,333 \end{pmatrix}$$

Следует отметить, что используя рекомендации труда [1] при записи уравнений (2), (3), относительные скорости спутников относительно водила получаются равными +133.333 рад/с, то есть отличаются знаком от нашего решения и не дают истинного направления вращательного движения спутников по отношению к направлению вращения центрального звена с угловой скоростью $\omega_d = +100$ рад/с. А на основании работы [4] относительные скорости спутников относительно водила равны 533 рад/с., что также не соответствует действительности. Первое замечание иллюстрируется фрагментом программы, который для одного и того же спутника получаются разные относительные скорости относительно водила (см. вектора – результаты $\text{Isolve}(Q,G)$ $\text{Isolve}(A,B)$).

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{-z_1}{z_{st1}} & S_{12} &= \frac{z_2}{z_{st2}} & S_{21} &= \frac{-z_1}{z_{st1}} & S_{22} &= \frac{z_2}{z_{st2}} & k_2 &= \frac{S_{22}}{S_{21}} \\
S_{11} &= -2 & S_{12} &= 1.5 & k_1 &= 0.75 & S_{21} &= -2 & S_{22} &= 4 & k_2 &= -2
\end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 1 & k_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & -S_{11} & -1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & k_2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & -S_{21} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ w_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 1 & k_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{12} & 0 & -S_{12} & -1 \\ -k_2 & 0 & 1 & k_2 - 1 & 0 & 0 \\ S_{22} & 0 & 0 & -S_{22} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ w_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Isolv}(Q, G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 122.222 \\ 100 \\ 33.333 \\ -133.333 \\ -133.333 \end{pmatrix} \quad \text{Isolv}(A, B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 122.222 \\ 100 \\ 33.333 \\ 133.333 \\ -133.333 \end{pmatrix}$$

Т.е. используемые матричные системы, построенные на основе рекомендаций работ [1] не инвариантны по отношению к вектору неизвестных, что может привести в расчетной практике к появлению ошибок.

Выводы. 1. Целесообразно определить внутреннее передаточное отношение планетарного ряда «к» как отношение характерных параметров зубчатых зацеплений ($k = S_2/S_1$), где S_1 и S_2 определяются по формулам (2) и (3) и считаются положительными если зацепление внешнее и отрицательными - если внутренние. Знак «к» при этом определяется автоматически. 2. Показано, что кинематические матричные системы планетарных механизмов, несмотря на различие в записи с разными значениями характерных параметров сателлитов, инвариантны по отношению к вектору неизвестных. 3. Предложенная методика является универсальной, эффективной и проверена на многочисленных примерах, что позволяет автоматизировать анализ кинематики ступенчатых механических и бесступенчатых гидрообъемно-механических трансмиссий транспортных средств.

Список литературы: 1. Планетарные передачи. Справочник /Под ред. В.Н. Кудрявцева и Ю.Н. Кирдяшева. –Л.: Машиностроение, 1977.–536 с. 2. Кудрявцев В.Н. Планетарные передачи. – М.: Машиностроение, 1966. – 307 с. 3. Красеньков В.И., Ващев А.Д. Проектирование планетарных механизмов транспортных машин. – М.: Машиностроение, 1986. –272с. 4. Цитович И.С., Альгин В.Б., Грицкевич В.В. Анализ и синтез планетарных коробок передач автомобилей и тракторов. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 224 с. 5. Самородов В.Б. Генерация матричных моделей для гидрообъемно-механических трансмиссий произвольного вида //Системотехника автомобильного транспорта.– Харьков: ХГАДГУ, 1999.– С.61-68. 6. Самородов В.Б. Системный подход к генерации математических матричных моделей для планетарных механических и гидрообъемно-механических трансмиссий произвольного вида //Вестник ХГПУ.– 1999.– Вып.46.– С.51-54.

Поступила в редколлегию 07.11.08